2. Stunde

Wednesday, March 10, 2010
13:49

Def: $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt (maschinen) berechenb., wenn
$\exists M$ sd $f = f_M^n$ (d.h., f wird durch M berechnet, insbesondere: $f(x_1 \dots x_n)$ ist def. gdw M auf input $(x_1 \dots x_n)$ hält!)

Typische Prüfungsfrage: Zeige: $x \mapsto {}^{x+2}/_3$ (bel. Rundung) ist berechenbar. [Gib Maschine in beliebiger Notation an, gib Rundung an, z.B $\lfloor {}^{x+2}/_3 \rfloor$ oder $\lceil {}^{x+2}/_3 \rceil$)

1 2 μ-Rekursion

Grundfunktionen:

(·) $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad x \mapsto x+1$

(·) $I_i^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $\quad (x_1 \dots x_n) \mapsto x_i$ $\quad (i \leq n)$

(·) $C_0^0 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ $\quad 0$

(oder, wenn das zu unheimlich ist:
$C_0^1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad x \mapsto 0$)

(alle Grundfkt sind total)

Einsetzung: Gegeben $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und

$g_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ $\quad (i = 1, \dots, n)$

Dann liefert Einsetzung $f(g_1(x_1 \dots x_m), \dots, g_n(x_1 \dots x_m))$

(Bem: wenn f, g_i total, dann auch $f(g_1 \dots g_n)$)

Primitive Rekursion Geg $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$
die prim Rek $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ ist def durch:

$f(x_1 \dots x_n, 0) = g(x_1 \dots x_n)$

$f(x_1 \dots x_n, y+1) = h(x_1 \dots x_n, y, f(x_1 \dots x_n, y))$

(wenn g, h total, dann f total)

μ-Rek. Geg $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ Die μ Rekursion μg ist die Fkt $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ def durch
$f(x_1 \ldots x_n) = \min(y : g(x_1, \ldots x_n, y) = 0)$
wenn g total ist! Allgemein:
$f(x_1 .. x_n) = \min(y : \forall y' < y \ g(x_1 .. x_n, y')$ def & $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$
(g tot. $\not\Rightarrow$ f tot.)

Def Die Klasse der prim. rek. Funktionen [bzw μ-rek. Fkt] ist die kleinste Klasse die die Grundfkt. enthält und unter Einsetzung, prim. Rek [bzw. zusätzlich μ-Rek.] abgeschlossen ist.

Äquiv.: $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (partielle) ist prim. rek [bzw μ-rek.], wenn f aus den Grundfkt durch Einsetzung, prim. Rek. [bzw: zusätzlich μ-Rek.] gebildet werden kann.

Es gilt: jede prim. rek. Fkt. ist total.

Bsp: (·) $x+3$ ist prim rek:
$x + 3 = S(S(S(x)))$, dh. entsteht durch Einsetzung der Grundfkt. S
(·) Die konstante Fkt 3 ist prim rek
$3 = (x+3) \circ C_0^0$
(·) $f = y \dot{-} 1$ ist prim rek:
$f(0) = 0 = g() \quad \to \quad g = C_0^0$
$f(y+1) = y = h(y, f(y)) \quad \to \quad h = I_1^2$
$\Rightarrow \underset{1\text{-st.}}{f}$ ist prim. Rek von $\underset{0\text{-st.}}{C_0^0}$ und $\underset{2\text{-st.}}{I_1^2}$
(·) $f(x,y) = x + y$ ist prim rek
$f(x,0) = x = g(x) \quad \to \quad g = I_1^1$
$f(x, y+1) = f(x,y) + 1 = h(x, y, f(x,y)) \quad \to$
$h = S \circ I_3^3$

2. Stunde (Forts.)

Satz: μ-rek $\Longleftrightarrow$ (maschinen)berechenbar

Bew: $\Rightarrow$ sehr leicht (1.3, teilw. Ü)
$\Leftarrow$: Rekursionstheorem (1.4)

1.3. Jede rek. Fkt ist berechenbar

Bew ist Ind: Wir müssen zeigen:

(1) Grundfkt. sind berechenbar

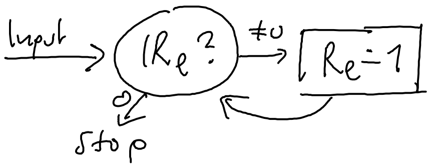
(2) Wenn $g, f_1 \dots f_n$ berechenb., dann auch $g(f_1, \dots, f_n)$

(3) Wenn g, h berechenb., dann auch $f = \text{Prim-rek}(g, h)$

(4) Wenn g berechenb., dann auch $f = \mu g$

Bew: Vorbereitung:

(*) Hilfsprogramm $\mathcal{L}^l$ (löscht Register l)



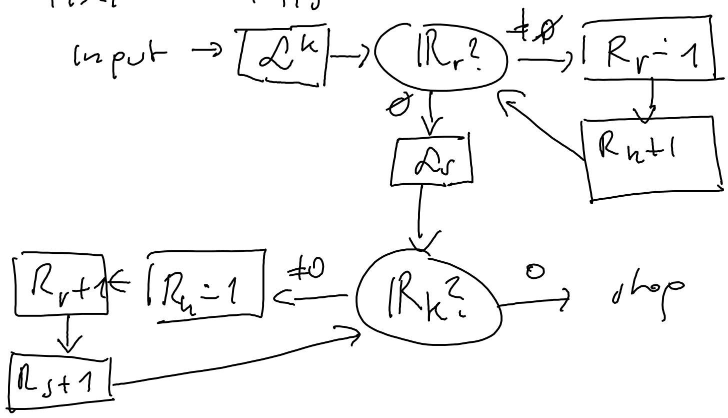
D.h. formal: $\mathcal{L}^l = ((l,3,1),(l,-1),(0,0,0),0)$

(*) Hilfsprogramm $K^{r,s}$:

Kopiere Register r nach Register s

D.h. bei Input $(R_0, R_1 \,..\, R_r \,..\, R_s$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\; x_0, x_1, \quad x_r \quad\; x_s$

Fixiere $k \neq r, s$



Grundfunktionen:

S: Input $\longrightarrow \boxed{K^{1,0}} \longrightarrow \boxed{R_0 + 1} \longrightarrow$ stop

I^n_l Input $\longrightarrow \boxed{K^{l,0}} \longrightarrow$ stop

C^0_0 Input $\longrightarrow$ stop